यांत्रिकी :- किसी भी वस्तु या पिण्ड की स्थिर या गतिशील अवस्था में बल कार्यरत होता है. बल की क्रियाशीलता के अध्ययन को "यांत्रिकी" कहते है.

यांत्रिकी को दो भागों में बांटा गया है. 25 Marks

1. स्थैतिक या स्थिति विज्ञान (STATICS) → UNIT-III
2. गतिक या गति विज्ञान (DYNAMICS) UNIT-I, II. → 50 MARKS

(1) स्थिति विज्ञान :- यांत्रिकी की वह शाखा जिसमें हम उन बलों का अध्ययन करते हैं जो वस्तु को स्थिर रखने में कार्यरत होते हैं।

(2) गति विज्ञान :- यांत्रिकी की वह शाखा जिसमें हम उन बलों का अध्ययन करते हैं जो वस्तु को गतिशील रखने में कार्यरत होते हैं

गति विज्ञान (DYNAMICS)

किसी भी वस्तु की गति का अध्ययन

महत्वपूर्ण परिभाषाएं :

(1) चाल :- किसी कण या पिण्ड का समय के सापेक्ष स्थिति में परिवर्तन

(2) वेग :- कण या पिण्ड का किसी निश्चित दिशा में समय के सापेक्ष स्थिति में परिवर्तन

(3) त्वरण :- वेग में परिवर्तन की दर

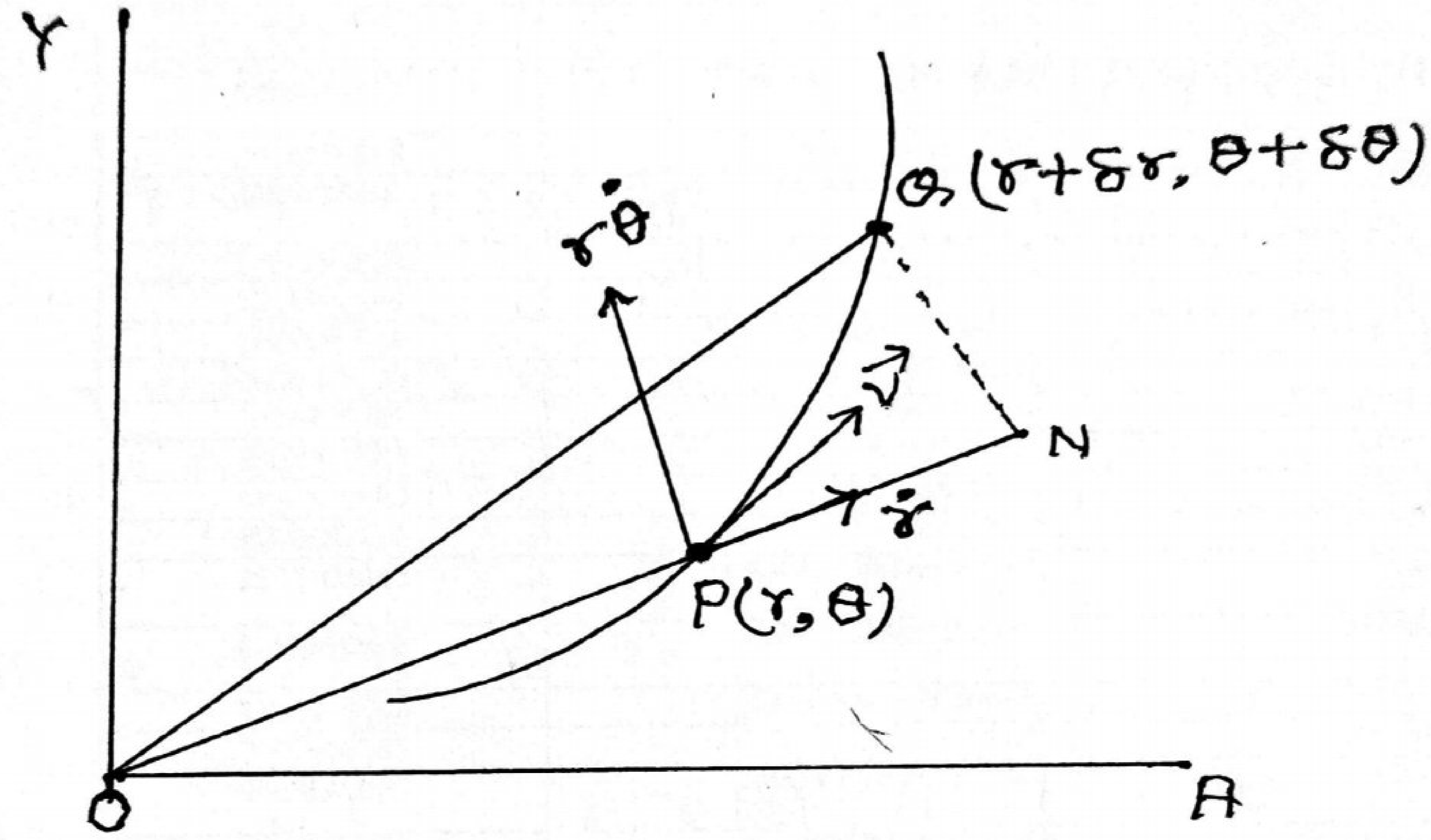
(4) विस्थापन :- किसी कण द्वारा, किसी निश्चित समय में तय की गई दूरी

(1) अरीय एवं अनुप्रस्थ वेग :-

अरीय वेग → सदीश त्रिज्या के अनुदीश

अनुप्रस्थ वेग → लम्बवत दिशाओं के अनुदीश

माना O मूल बिन्दु है, तथा OA प्रा० रेखा है किसी समय t व $t+\delta t$ पर कण की स्थिति $P(r,\theta)$ व $(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ है



अरीय वेग

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{PN}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{OQ\cos\delta\theta - OP}{\delta t} \quad \text{by } \Delta QPN$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{(r+\delta r)\cos\delta\theta - r}{\delta t}$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta r\cos\delta\theta}{\delta t} - \lim_{\delta t\to 0}\frac{r(1-\cos\delta\theta)}{\delta t}$$

$\delta t\to 0,\ \delta\theta\to 0$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{1-\cos\delta\theta}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\delta\theta}{2}}{\delta t}$$

अरीय वेग का घटक $\frac{dr}{dt}$ या $\dot{r}$

Scanned with ACE Scanner

अनुप्रस्थ वेग :-

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{NQ}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{(r+\delta r)\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}(r+\delta r)\frac{\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}(r+\delta r)\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t}$$ $\delta\theta$ से गुणा व भाग

$$= \lim_{\delta t\to 0}(r+\delta r)\frac{\delta\theta}{\delta t}$$ $\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}=1$

$$= \lim_{\substack{\delta t\to 0\\ \delta\theta\to 0}} r\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t} + \lim_{\substack{\delta t\to 0\\ \delta\theta\to 0}} \delta r\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

अनुप्रस्थ वेग $= r\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t} = r\cdot\frac{d\theta}{dt}$

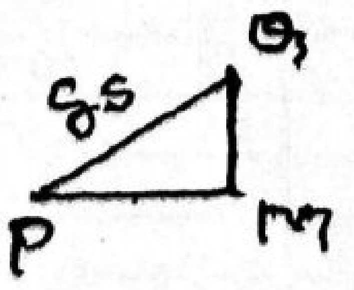
$= r\cdot\dot{\theta}$ $\qquad \dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{अरीय वेग} = \dot{r}\\ \text{अनुप्रस्थ वेग} = r\dot{\theta}\end{array}}$$

(2) स्पर्श रेखीय व अभिलाम्बिक वेग :- जैसे-जैसे कण अपने पथ पर चलता है उसका वेग v, P पर स्पर्श रेखा की दिशा में होता है, और इसका परिमाण $\dot{s}$ होता है.

P पर स्पर्श रेखीय वेग

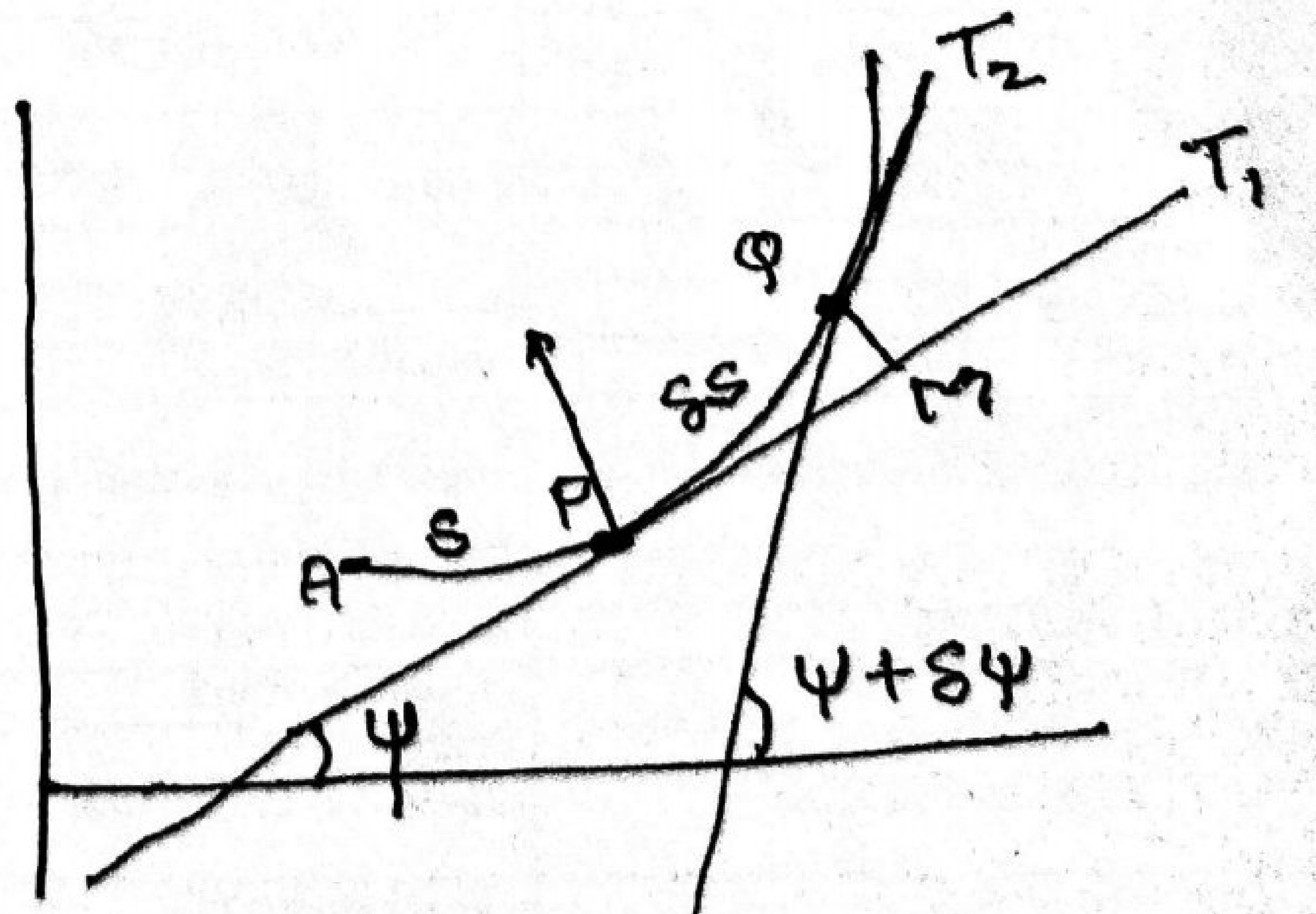
$$= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\, PM}{\delta t}$$



$$= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta s}{\delta t}$$

$$= \frac{ds}{dt}$$

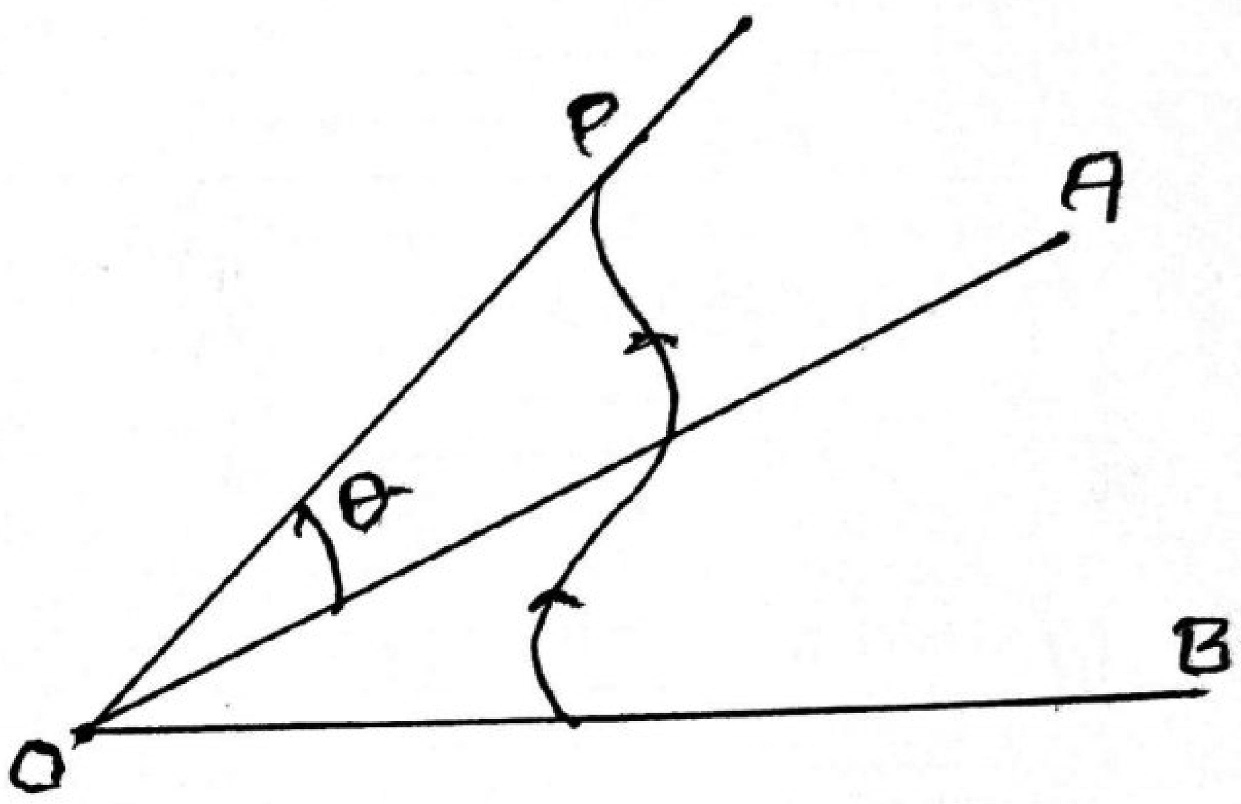
$$= \dot{s}$$



अभिलाम्बिक वेग $= 0$.

(ड) कोणीय वेग :— माना किसी समतल मे रेखा OA है, जिस समतल कोई कण P गति करता है।

"बिन्दु O के पारित कोण AOP के बदलने की दर को "कोणीय वेग" कहते हैं



माना δt समय में कण का विस्थापन δθ है तो

$$\text{कोणीय वेग} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

कोणीय वेग व ~~स्पर्श~~ रेखीय वेग में संबंध :—

हम जानते हैं कि

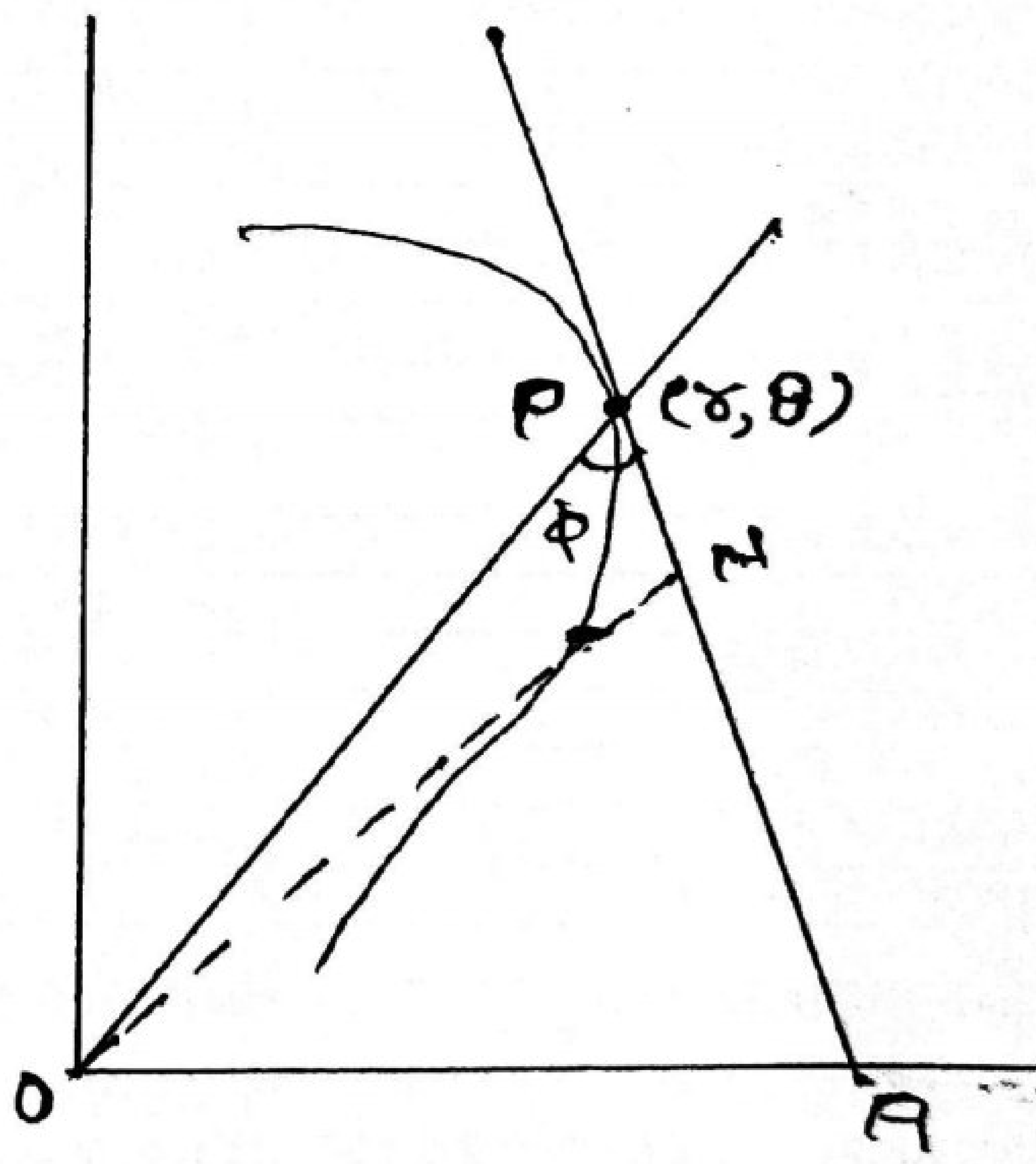
$$\dot{r} = v\cos\phi$$

$$r\dot{\theta} = v\sin\phi$$

तथा $\dot{\theta} = \frac{v\sin\phi}{r}$

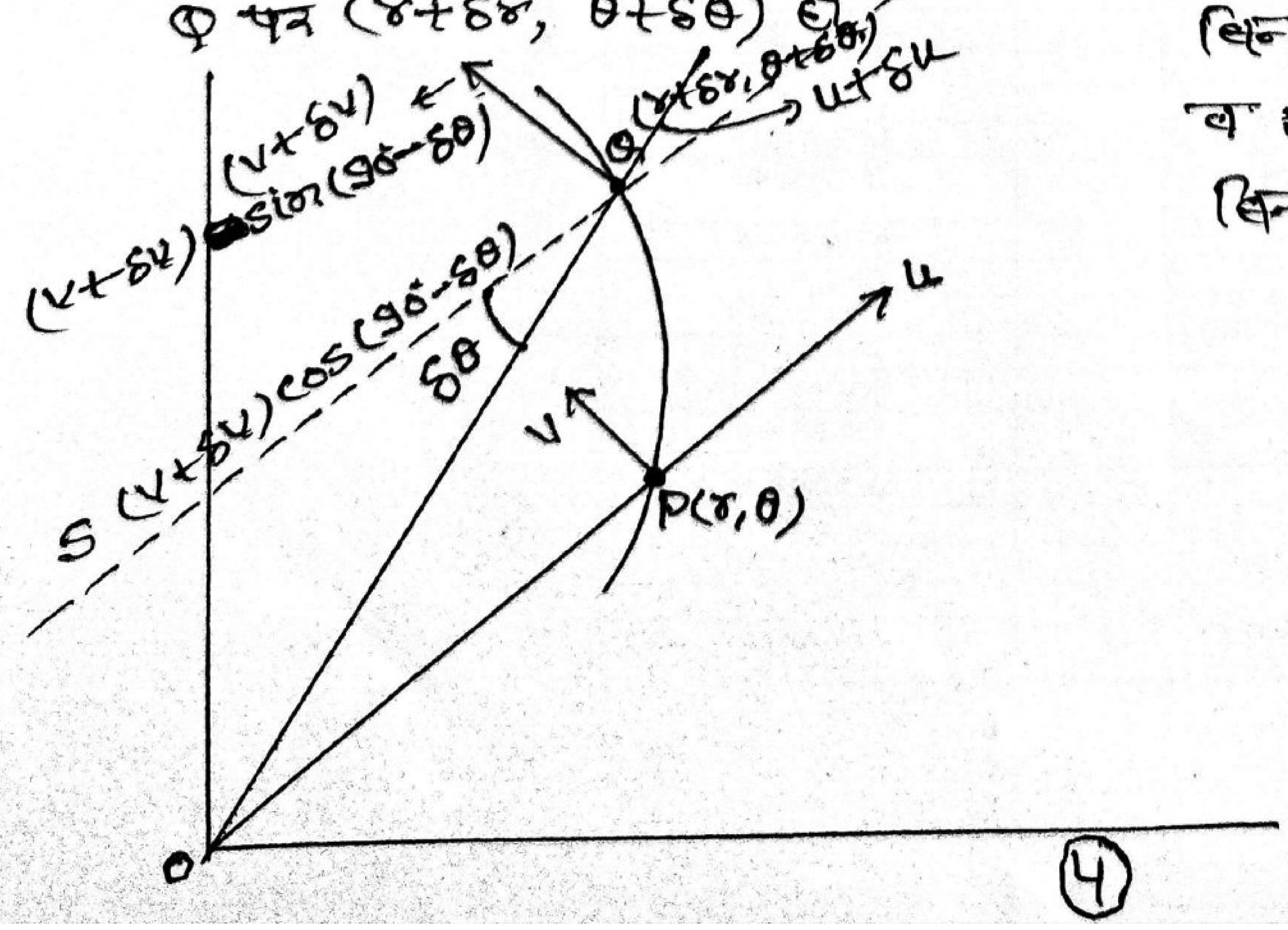
$P = r\sin\phi \qquad \sin\phi = \frac{P}{r}$ [ΔOPN]

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{v \cdot P}{r^2}}$$



त्वरण :—

(1) अरीय व अनुप्रस्थ त्वरण :— माना किसी समतल में किसी कण की स्थिति बिन्दु P पर (r, θ) है, तथा δt समय बाद बिन्दु Q पर (r+δr, θ+δθ) है।



बिन्दु P पर मा० अरीय वेग u व अनुप्रस्थ वेग v है

बिन्दु Q पर,

अरीय वेग u+δu

अनुप्रस्थ वेग v+δv. है।

Scanned with ACE Scanner

Scanned with CamScanner

बिन्दु P पर → अरीय वेग u
अनुप्रस्थ वेग v है.

इसी प्रकार बिन्दु Q पर
अरीय वेग $u+\delta u$
अनुप्रस्थ वेग $v+\delta v$ है

तथा $u+\delta u$ के वेग घटक
OP के अनुदीश $(u+\delta u)\cos\delta\theta$
OP के लम्बवत $(u+\delta u)\sin\delta\theta$

वेग $v+\delta v$ के घटक

$$(v+\delta v)\cos(90+\delta\theta) = -(v+\delta v)\sin\delta\theta$$
$$(v+\delta v)\sin(90+\delta\theta) = (v+\delta v)\cos\delta\theta$$

$\cos(90+\theta) = -\sin\theta$

OP के अनुदीश Q पर वेग
$$(u+\delta u)\cos\delta\theta - (v+\delta v)\sin\delta\theta$$

Q पर OP के लम्बवत वेग
$$(u+\delta u)\sin\delta\theta + (v+\delta v)\cos\delta\theta$$

अरीय त्वरण :-

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{\text{OP के अनुदीश वेग में परिवर्तन}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{(u+\delta u)\cos\delta\theta - (v+\delta v)\sin\delta\theta - u}{\delta t}$$

$\theta \to 0$ $\cos\delta\theta \to 1$ $\sin\delta\theta \to \delta\theta$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{\cancel{u}+\delta u - (v+\delta v)\sin\delta\theta - \cancel{u}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta u - v.\delta\theta - \delta v.\delta\theta}{\delta t} \qquad \delta v \to 0$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta t} - v.\frac{\delta\theta}{\delta t}\right)$$

put limit

$$= \frac{du}{dt} - v.\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta t} - v \cdot \frac{\delta \theta}{\delta t} \right)$$

$$= \frac{du}{dt} - v \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad u = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$v = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \dot{\theta}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$\boxed{\text{अरीय वेग} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2.}$

अनुप्रस्थ त्वरण :-

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(u+\delta u)\sin\delta\theta + (v+\delta v)\cos\delta\theta - v}{\delta t}$$

$$\delta\theta \to 0 \qquad \cos\delta\theta = 1, \quad \sin\delta\theta = \delta\theta.$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(u+\delta u)\delta\theta + \cancel{v} + \delta v - \cancel{v}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{u \cdot \delta\theta + \delta u \cdot \delta\theta + \delta v}{\delta t}$$

$$\delta u = 0$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \left(u \cdot \frac{\delta\theta}{\delta t} + \frac{\delta v}{\delta t} \right)$$

$\boxed{\text{अनुप्रस्थ वेग} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}$

$$= u \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

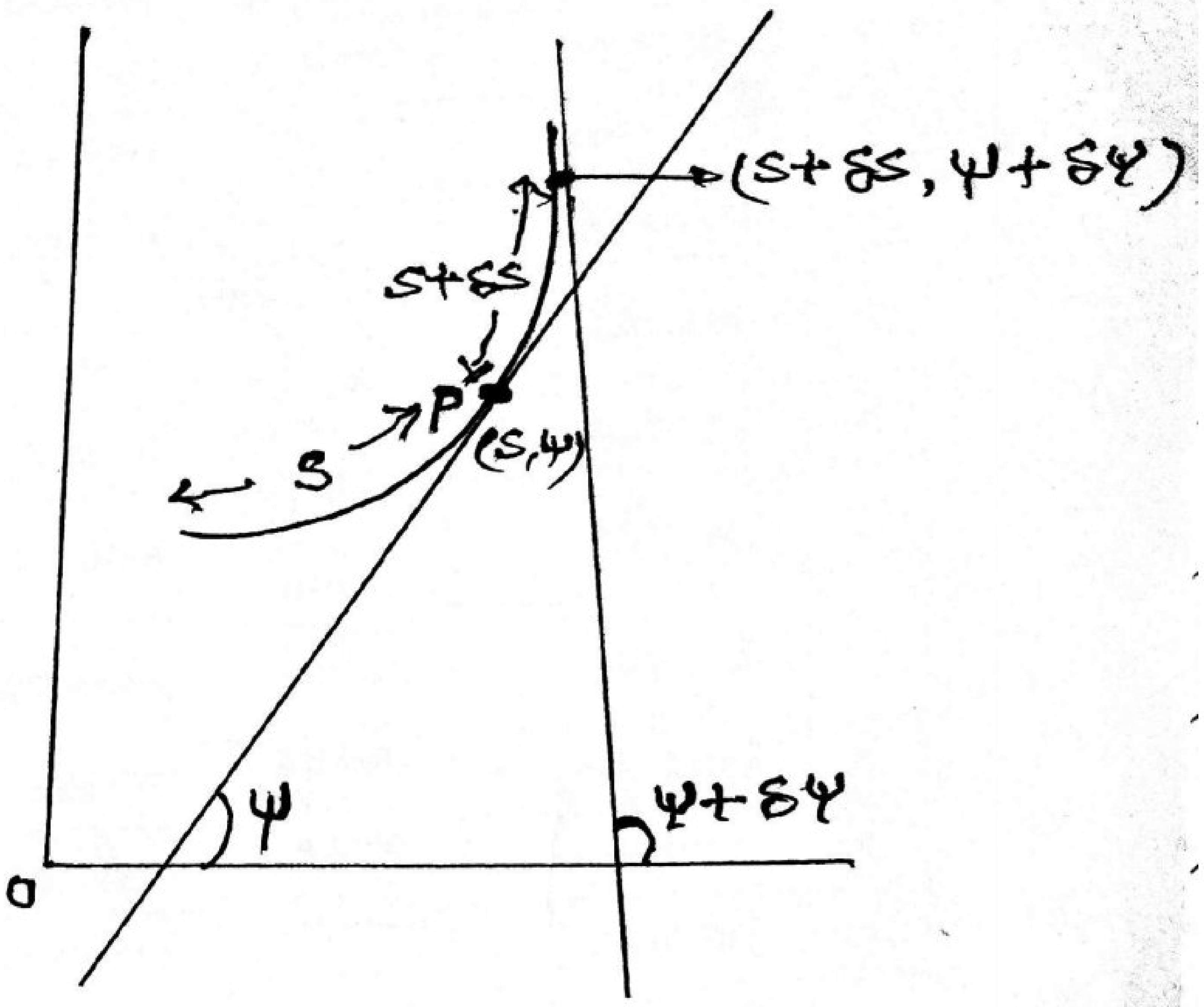
$$= \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta})$$

$$= \dot{r}\dot{\theta} + r \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= \dot{r}\dot{\theta} + r \cdot \dot{\theta}^2 + \dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

स्पर्शरेखीय व अभिलाम्बिक त्वरण :-

बिन्दु $P(s, \psi)$ तथा $Q(s+\delta s, \psi+\delta\psi)$.



स्पर्श रेखा के अनुदीश त्वरण

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{(v+\delta v)\cos\delta\psi - v}{\delta t}$$

$\delta\psi \to 0 \quad \cos\delta\psi \to 1$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{\cancel{v}+\delta v-\cancel{v}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta v}{\delta t}$$

$$= \frac{dv}{dt} \qquad v = \dot{s}$$

$$= \frac{d}{dt}\dot{s} = v.\frac{dv}{ds}.$$

अभिलम्ब के अनुदीश त्वरण :-

$$\lim_{\delta t\to 0} \frac{(v+\delta v)\sin\delta\psi}{\delta t}$$

$$\lim_{\delta t\to 0} \frac{(v+\delta v)\delta\psi}{\delta t}$$

$$\lim_{\delta t\to 0} v.\frac{\delta\psi}{\delta t} + \delta v.\frac{\delta\psi}{\delta t} \qquad \delta v \Rightarrow 0$$

$$\lim_{\delta t\to 0} v.\frac{\delta\psi}{\delta t}$$

$$= v.\frac{d\psi}{dt} = v.\frac{d\psi}{dt}.\frac{ds}{ds}$$

$$= v.\frac{ds}{dt}.\frac{d\psi}{ds} = v.v.\frac{1}{\rho} \qquad \boxed{\frac{ds}{d\psi} = \rho.}$$

$$= \frac{v^2}{\rho}$$

formula's :-

वेग (velocity).

अरीय वेग	$\frac{dr}{dt}$ या $\dot{r}$
अनुप्रस्थ वेग	$r \cdot \dot{\theta}$ या $r \cdot \frac{d\theta}{dt}$
स्पर्श रेखीय वेग	$\dot{s}$ या $\frac{ds}{dt}$
अभिलाम्बिक वेग	0
कोणीय वेग	$\frac{d\theta}{dt}$ या $\dot{\theta}$

त्वरण (acceleration).

अरीय त्वरण	$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ या $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$
अनुप्रस्थ त्वरण	$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ या $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\theta})$
स्पर्श रेखीय त्वरण	$v \cdot \frac{dv}{ds}$ या $\frac{d}{dt}\dot{s}$
अभिलाम्बिक त्वरण.	v^2/ρ या $v \cdot \frac{d\psi}{dt}$.